Olimpiada Națională de Matematică 2019
Etapa locală – Iași, 15 februarie 2019

CLASA a VI-a
Barem de corectare

Problema 1.

Fie A = { x/x=2a-3, $a \in \mathbb{N}$ } și
B = {x/x=901-9b, $b \in \mathbb{N}$ }

Arătați că orice element din mulțimea $A \cap B$ este de forma 901-18k, $k \in \mathbb{N}, k \leq 50$.

Soluție și barem:

1. $x \in A \cap B \Rightarrow 2a - 3 = 901 - 9b$………………………………………………..1p
2. Scrie $a = 452 - \frac{9b}{2}$ …………………………………………………………….2p
3. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow b = 2k \Rightarrow x = 901 - 18k$……………………………………………..1p
4. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow 901 - 18k \geq 0$………………………………………………………2p
5. Finalizare $k \leq 50$…………………………………………………………………1p

Problema 2.

Determinați numerele naturale nenule a,b,x,y astfel încât $(a, b) = 2^{x+y}$ și $a + b = 12$.
Am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor *a și b.*

Soluție și barem:

Scrie $a = 2^{x+y} * m$ și $b = 2^{x+y} * n, (m, n) = 1$…………………..………………..1p
$2^{x+y}(m + n) = 12 \Rightarrow 2^{x+y}/12$ ……………………………………………………1p
$x, y\ nenule \Rightarrow 2^{x+y} \geq 4$……………………………………………………………1p
$2^{x+y} = 4 \Rightarrow x = y = 1$…………………………………………………………………1p
$m + n = 3 \Rightarrow m = 1, n = 2\ sau\ m = 2, n = 1$……………………………………...1p
$a = 4, b = 8, x = y = 1\ sau\ a = 8, b = 4, x = y = 1$………………………………2p

Problema 3.

Se consideră un segment AB cu lungimea de 120 cm și punctele $M_1, M_2, \dots, M_n, n \in \mathbb{N}^*$, aparţinând segmentului AB astfel încât $AM_i = k_i$ unde k_i este număr natural nenul și $i \in \{1,2, \dots, n\}$. Colorăm cu roșu punctele M_i pentru care lungimile segmentelor AM_i și M_iB se exprimă prin numere prime. Restul punctelor considerate se colorează cu albastru.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

a) Care este valoarea maximă a lui n și câte puncte sunt colorate cu albastru în acest caz?
b) Considerând oricâte puncte pe segmentul AB, care este valoarea minimă a lui n pentru care avem cel puțin un punct colorat cu roșu?

Soluție:

a) Valoarea maximă a lui n este 119, atunci când $AM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{119}B = 1cm$. Vom determina câte puncte sunt colorate cu roșu (r) și atunci numărul punctelor colorate cu albastru este 119-r. Perechile de numere prime mai mici decât 119, având suma 120 sunt: (7,113), (11,109), (13,107), (17,103), (19,101), (23,97), (31,89), (37,83), (41,79), (47,73), (53,67), (59,61). Avem 12 perechi, adică 24 de numere colorate cu roșu. Numărul punctelor colorate cu albastru este 119-24=95.
b) Din punctul a) se știe că avem cel mult 95 de puncte albastre. Atunci, dacă alegem 96 de puncte, cel puțin unul va fi roșu. Prin urmare n=96.

Barem:

a) Valoarea maximă a lui n=119, dacă $AM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{119}B = 1cm$ ……………..…..1p
Fie r=nr. puncte colorate cu roșu ⇒ 119-r= nr. puncte colorate cu albastru ……………..1p
Perechile de numere <119 având suma 120 sunt: (7,113), (11,109), (13,107), (17,103), (19,101), (23,97), (31,89), (37,83), (41,79), (47,73), (53,67), (59,61) ……………………1p
12 perechi ⇒ 24 numere colorate cu roșu ………………………………………………1p
Numărul punctelor colorate cu albastru este 119-24=95 …………………………………1p
b) Din punctul a avem cel mult 95 de puncte albastre.
Dacă alegem 96 de puncte, cel puțin unul va fi roșu ……………………………………1p
Finalizare n=96……………………………………………………………………..1p

Problema 4.

Semidreptele [OA, [OB, [OC, [OD, [OE, [OF, [OG sunt așezate în sensul invers acelor de ceasornic, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 36°$, $OC \perp OB$, unghiul $\sphericalangle COD$ este complementul $\sphericalangle AOB$, punctele B,O,E sunt coliniare , $m(\sphericalangle EOF)$ este mai mică decât $m(\sphericalangle COD)$ cu 5° [OG este bisectoarea unghiului $\sphericalangle FOA$. Calculați:
a) $măsura$ unghiului COD;
b) măsura unghiului GOA.

Soluție:

a) $m(\sphericalangle COD) = 90° - 36° = 54°$;
b) Cum B,O,E coliniare, $m(\sphericalangle DOE) = 180° - (90° + 54°) = 36°$. Înseamnă că și punctele A,O,D coliniare. Din ipoteză, $m(\sphericalangle EOF) = m(\sphericalangle COD) - 5° = 54° - 5° = 49°$.Cum

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

E,O,B coliniare, $m(\sphericalangle AOF) = 180° - (36° + 49°) = 95°$. De aici, fiindcă [OG este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOF$, găsim că $m(\sphericalangle AOG) = 47°30'$.

Barem:

a) $m(\sphericalangle COD) = 90° - 36° = 54°$……………………………………………………………1p

b) $m(\sphericalangle DOE) = 180° - (90° + 54°) = 36°$………………………………………………2p

Punctele A,O,D coliniare………………………………..……..………………………...1p

$m(\sphericalangle EOF) = m(\sphericalangle COD) - 5° = 54° - 5° = 49°$………………………………………1p

$m(\sphericalangle AOF) = 180° - (36° + 49°) = 95°$……………………………………………….1p

$m(\sphericalangle AOG) = 47°30'$………………………………………………………………….1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro