Olimpiada Națională de Matematică 2019
Etapa locală– Iași, 15 februarie 2019

CLASA a VII-a
Barem de corectare

Problema 1. a) Să se demonstreze că $S=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}$ este număr rațional.

b) Dacă $\left(\overline{ab2},\overline{bc7},\overline{ca8}\right)=3,$ demonstrați că $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ este număr irațional, unde (x,y,z) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor *x*, *y* și *z*.

Soluție și barem:

a) Obține $S=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{100}}-\frac{1}{\sqrt{99}}\right)=-1+\frac{1}{10}=-\frac{9}{10}\in \boldsymbol{Q}$ 3p

b) Se arată că $a^2+b^2+c^2=M_3+2,$ deci nu este pătrat perfect și astfel $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}.$

Impune condițiile $3/\overline{ab2}, 3/\overline{bc7}$ și $3/\overline{ca8}$ 1p

Deduce: $a=M_3, b=M_3+1$ și $c=M_3+1$..2p

Finalizare: $a^2+b^2+c^2=M_3+2,$ deci $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$ 1p

Problema 2. Fie *ABCD* un paralelogram în care unghiul $\measuredangle BAD$ este ascuțit. Dacă punctele *M* și *Q* se află pe semidreptele (*CB*, respectiv (*CD* astfel încât $[AQ]\equiv[AM]$, $\measuredangle DAQ\equiv\measuredangle DAC$ și $\measuredangle BAM\equiv\measuredangle BAC$, să se demonstreze:

a) dreptele *DB* și *MQ* sunt paralele;
b) patrulaterul *ABCD* este romb.

Soluție și barem:

a) Folosind teorema bisectoarei în ΔMAC, obține: $\frac{BM}{BC}=\frac{AM}{AC}$ 1p

Analog, în ΔCAQ, obține: $\frac{DQ}{DC}=\frac{AQ}{AC}$ 1p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Deduce: $\frac{BM}{BC}=\frac{DQ}{DC}$, deci, conform reciprocei teoremei lui Thales, $QM \parallel DB$ ……………………1p

b) Fie $AC\cap BD=\{O\}, AC\cap QM=\{O_1\}$

În ΔQMC: din *DB* paralelă cu *QM*, *DO*=*OB* obține $QO_1=O_1M$ ………………………………1p

În ΔQAM: deduce $AO_1\perp QM$ și, de aici, $AC\perp BD$ ……………………………………………...2p

Finalizare: *ABCD* paralelogram și $AC\perp BD$ implică *ABCD* romb 1p

Problema 3. Pentru $n\geq 2, n\in \mathbf{N}$, notăm $a_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+3}+...+\frac{1}{n^2+n}$.

a) Comparați a_{2018} cu a_{2019}.

b) Aflați $[x]$, unde $x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{13}}+\frac{1}{a_{17}}\right)$ și $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului *x*.

Soluție și barem:

a) Obține: $\frac{1}{n+1}<a_n<\frac{1}{n}$ 2p

Deoarece $\frac{1}{2019}<a_{2018}<\frac{1}{2018}$ și $\frac{1}{2020}<a_{2019}<\frac{1}{2019}$ obține $a_{2019}<a_{2018}$ 2p

b) Obține: $13<\frac{1}{a_{13}}<14$ și $17<\frac{1}{a_{17}}<18$ 2p

Finalizare: $15<x<16$, deci $[x]=15$ 1p

Problema 4. Fie *ABCD* un pătrat de latură *l* și *E*, respectiv *F* mijloacele laturilor *BC*, respectiv *CD*. Arătați că dacă $AE\cap BF=\{M\}$, atunci $DM=l$.

Soluție și barem:

Obține $AE\perp BF$ 2p

Fie *T* – mijlocul lui $[AB]$ și $DT\cap AE=\{P\}$.

Deoarece *BFDT* este paralelogram și $AM\perp BF$, obține $AM\perp DT$ ………………………………...2p

Obține *TP* – mediatoarea lui $[AM]$ ………………………………………………………………...2p

Finalizare: deoarece *TP* – mediatoarea lui $[AM]$ și $P\in[DT]$, rezultă că $AD=DM=l$ ……………1p

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Orice rezolvare corectă , diferită de barem ,va primi punctajul maxim corespunzător.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro