Olimpiada Națională de Matematică 2019
Etapa locală – Iași, 15 februarie 2019

CLASA a VIII -a
Barem de corectare

Problema 1.
Aflaţi numărul real *x* care verifică egalitatea $[10+x]+2\cdot([x]-x)=2019,$ unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

Soluție și barem:
Din $[10+x]=10+[x]$ şi $x=[x]+\{x\}$ obţinem, prin înlocuire în ecuaţia din enunţ, că $[x]-2\cdot\{x\}=2009$. **3p**

Atunci este necesar ca $2\cdot\{x\}\in\mathbb{Z},$ de unde $\{x\}\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$. **2p**

Dacă $\{x\}=0,$ atunci $x\in\mathbb{Z}$ şi $[x]=2009,$ deci $x=2009.$

Dacă $\{x\}=\frac{1}{2},$ atunci $[x]=2010,$ deci $x=2010,5.$

În concluzie, mulţimea soluţiilor este $S=\{2009;2010,5\}$. **2p**

Problema 2.
Se consideră numerele reale pozitive *a*, *b* şi *x*, astfel încât $\frac{a}{x}=b\cdot x.$ Demonstraţi că:

a) dacă *b* şi *x* sunt numere naturale nenule, atunci *a* este un număr natural divizibil cu *x*;

b) dacă *b* şi *x* sunt numere naturale nenule, atunci $\sqrt{a\cdot b}$ este număr raţional;

c) dacă $a\neq b,$ atunci $x\in\left(\frac{2\cdot a}{a+b},\frac{a+b}{2\cdot b}\right).$

Soluție și barem:

a) $\frac{a}{x}=b\cdot x\Rightarrow a=b\cdot x^2.$ Cum $b,x\in\mathbb{N}^*$ rezultă că $a\in\mathbb{N}^*$ iar din $\frac{a}{x}\in\mathbb{N}$ deducem că $x\,|\,a$. **2p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117,
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

b) Conform a), dacă $b, x \in \mathbb{N}^*$ atunci $a \in \mathbb{N}^*$ şi $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{b^2 \cdot x^2} = |b \cdot x| = b \cdot x \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Q}$. ………. **2p**

c) $\frac{a}{x} = b \cdot x \Rightarrow x^2 = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ şi cum $x > 0$ deducem că $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$. …………………………... **1p**

Din $a \neq b$ deducem că numerele $\frac{a}{b}$ şi 1 sunt două numere pozitive distincte, pentru care putem aplica inegalitatea mediilor şi obţinem: $\frac{\frac{a}{b}+1}{2} > \sqrt{\frac{a}{b} \cdot 1} > \frac{2}{\frac{b}{a}+1} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2 \cdot b} > \sqrt{\frac{a}{b}} > \frac{2 \cdot a}{a+b} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{2 \cdot a}{a+b}, \frac{a+b}{2 \cdot b}\right)$.

……………………………………………………………………………………………….. **2p**

Problema 3.
Arătaţi că un paralelipiped dreptunghic, având dimensiunile $a, b, c > 0$, este cub dacă şi numai dacă are loc egalitatea $(a \cdot b)^2 + (b \cdot c)^2 + (c \cdot a)^2 = a \cdot b \cdot c \cdot (a+b+c)$.

Soluție și barem:

Pentru orice $a, b, c > 0$ are loc $(ab)^2 + (bc)^2 \geq 2\sqrt{a^2b^4c^2} = 2ab^2c$, conform

inegalităţii mediilor. Atunci, din $(ab)^2 + (bc)^2 \geq 2\sqrt{a^2b^4c^2} = 2ab^2c$,
$(bc)^2 + (ca)^2 \geq 2\sqrt{b^2c^4a^2} = 2abc^2$ şi $(ca)^2 + (ab)^2 \geq 2\sqrt{a^4b^2c^2} = 2a^2bc$, prin sumare, obţinem că $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq abc(a+b+c)$, pentru orice $a, b, c > 0$. ………………………………….**3p**

Aşadar, dacă în paralelipipedul dat are loc relaţia de egalitate, atunci trebuie ca în ultima inegalitate să avem egalitate, adică, de fapt, inegalităţile mediilor să devină egalităţi, de unde $ab = bc = ca$, deci $a = b = c$ şi corpul devine cub. ……………………………………………………………………**2p**

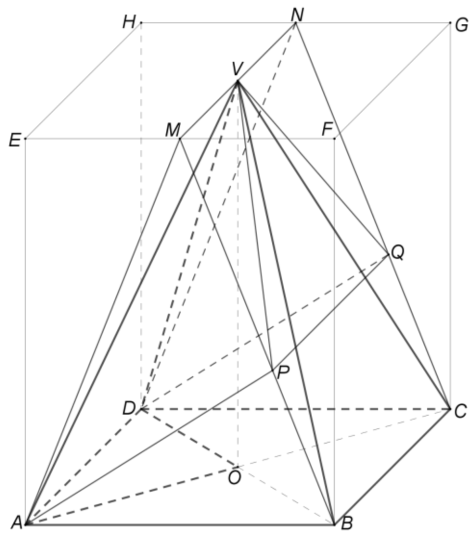
Reciproc, dacă paralelipipedul dreptunghic de dimensiuni *a*, *b*, *c* este cub, atunci $a = b = c$ şi egalitatea dată se verifică direct prin înlocuire. ……………………………………………………**2p**

Problema 4.
Se consideră prisma dreaptă *ABCDEFGH*. Centrele pătratelor *ABCD* şi *EFGH* sunt *O*, respectiv *V*, iar mijloacele muchiilor *EF* şi *GH* sunt *M*, respectiv *N*. Demonstraţi că:
a) corpul *VABCD* este piramidă patrulateră regulată;
b) dacă proiecţia lui *A* pe dreapta *BM* este *P*, atunci proiecţia lui *A* pe planul *(VBC)* este tot *P*;
c) proiecţiile triunghiului *VAD* pe planele *(ABC)* şi *(VBC)* sunt triunghiuri congruente dacă şi

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

numai dacă *ABMDCN* este prismă dreaptă cu o bază triunghiul echilateral *ABM*.

Soluție și barem:



a) Centrul pătratului *EFGH* este *V*, deci $VE = VF = VG = VH$, de unde $\Delta AEV \equiv \Delta BFV \equiv \Delta CGV \equiv \Delta DHV (C.C.)$, ceea ce implică $VA = VB = VC = VD$ şi astfel corpul *VABCD* este piramidă patrulateră regulată. ……………………………………………………...**2p**

b) Din $[EM] \equiv [HN]$ (jumătăţi de segmente congruente) şi $EM \parallel HN$ rezultă imediat că *EMNH* este paralelogram, deci $MN \parallel EH$. Pe de altă parte $EH \perp (ABF)$, deci $MN \perp (ABF)$ şi cum $AP \subset (ABF)$ rezultă că $MN \perp AP$. ………………………………………………………….**1p**

Din $AP \perp BM, AP \perp MN, BM \cap MN = \{M\}$ şi $BM, MN \subset (BMN)$ reiese că $AP \perp (BMN)$; dar $\{V, B, C\} \subset (BMN)$ şi *V*, *B* şi *C* necoliniare, deci $(VBC) = (BMN)$, prin urmare $pr_{(VBC)} A = \{P\}$. ……**2p**

c) Fie $Q = pr_{CN} D$; analog cu b) avem că $DQ \perp (VBC)$. $AD \parallel BC, AD \not\subset (VBC), BC \subset (VBC)$ implică $AD \parallel (VBC)$, de unde $pr_{(VBC)}[AD] = [PQ] \equiv [AD]$, $pr_{(VBC)} \Delta VAD = \Delta VPQ$ şi $pr_{(ABC)} \Delta VAD = \Delta OAD$. Cum triunghiurile *OAD* şi *VPQ* sunt isoscele şi $(AD) \equiv (PQ)$, rezultă că $\Delta OAD \equiv \Delta VPQ$ dacă şi numai dacă $(VP) \equiv (AO)$. ……………………………………………..**1p**

Notăm $AB = a > 0$ şi $AM = x > 0$. Atunci $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi aplicând teorema lui Pitagora în ΔMVP avem $VP^2 = MV^2 + MP^2 = \frac{a^2}{4} + MP^2$. Deci $(VP) \equiv (AO)$ dacă şi numai dacă $VP^2 = AO^2 \Leftrightarrow MP^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow MP = \frac{a}{2}$. Din $\Delta EMA \equiv \Delta FMB (C.C.)$ avem că $MB = AM = x$, iar prin aplicarea teoremei lui Pitagora, succesiv, în triunghiurile dreptunghice *MAP* şi *PAB* avem

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

că $AP^2 = x^2 - MP^2$ şi $AP^2 = a^2 - (x - MP)^2$, de unde $x^2 - MP^2 = a^2 - (x - MP)^2$. Atunci

$MP = \frac{a}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{a^2}{4} = a^2 - (x - \frac{a}{2})^2 \Leftrightarrow 2x^2 - a \cdot x - a^2 = 0 \Leftrightarrow (x - a) \cdot (2x + a) = 0 \Leftrightarrow x = a$,

adică exact ceea ce trebuia demonstrat. ……………………………………………………………**1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro