Olimpiada Națională de Matematică 2019
Etapa locală – Iași, 15 februarie 2019

CLASA a VII-a

Problema 1. a) Să se demonstreze că $S=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+...+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}$ este număr rațional.

b) Dacă $\left(\overline{ab2},\overline{bc7},\overline{ca8}\right)=3$, demonstrați că $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ este număr irațional, unde (x,y,z) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor *x*, *y* și *z*.

Problema 2. Fie *ABCD* un paralelogram în care unghiul $\measuredangle BAD$ este ascuțit. Dacă punctele *M* și *Q* se află pe semidreptele (*CB*, respectiv (*CD* astfel încât $[AQ]\equiv[AM]$, $\measuredangle DAQ\equiv\measuredangle DAC$ și $\measuredangle BAM\equiv\measuredangle BAC$, să se demonstreze:

a) dreptele *DB* și *MQ* sunt paralele;
b) patrulaterul *ABCD* este romb.

Problema 3. Pentru $n\geq 2, n\in \boldsymbol{N}$, notăm $a_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+3}+...+\frac{1}{n^2+n}$.

a) Comparați a_{2018} cu a_{2019}.
b) Aflați $[x]$, unde $x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{13}}+\frac{1}{a_{17}}\right)$ și $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului *x*.

Problema 4. Fie *ABCD* un pătrat de latură *l* și *E*, respectiv *F* mijloacele laturilor *BC*, respectiv *CD*. Arătați că dacă $AE\cap BF=\{M\}$, atunci $DM=l$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro