



Olimpiada Națională de Matematică 2019
Etapa locală – Iași, 15 februarie 2019

CLASA a VIII -a

Problema 1.

Aflați numărul real x care verifică egalitatea $[10+x] + 2 \cdot ([x] - x) = 2019$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Problema 2.

Se consideră numerele reale pozitive a, b și x , astfel încât $\frac{a}{x} = b \cdot x$. Demonstrați că:

- dacă b și x sunt numere naturale nenule, atunci a este un număr natural divizibil cu x ;
- dacă b și x sunt numere naturale nenule, atunci $\sqrt{a \cdot b}$ este număr rațional;
- dacă $a \neq b$, atunci $x \in \left(\frac{2 \cdot a}{a+b}, \frac{a+b}{2 \cdot b} \right)$.

Problema 3.

Arătați că un paralelipiped dreptunghic, având dimensiunile a, b și c numere reale pozitive, este cub dacă și numai dacă are loc egalitatea $(a \cdot b)^2 + (b \cdot c)^2 + (c \cdot a)^2 = a \cdot b \cdot c \cdot (a + b + c)$.

Problema 4.

Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFGH$. Centrele pătratelor $ABCD$ și $EFGH$ sunt O , respectiv V , iar mijloacele muchiilor EF și GH sunt M , respectiv N . Demonstrați că:

- corpul $VABCD$ este piramidă patrulateră regulată;
- dacă proiecția lui A pe dreapta BM este P , atunci proiecția lui A pe planul (VBC) este tot P ;
- proiecțiile triunghiului VAD pe planele (ABC) și (VBC) sunt triunghiuri congruente dacă și numai dacă $ABMDCN$ este prismă dreaptă cu o bază triunghiul echilateral ABM .

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.